Limita funkce – řešené příklady

V příkladu 2 (kde je mnoho limit) vyberte z každé skupiny nějaké limity, ostatní můžete zkusit „počítat" sami; a pokud budete mít s limitami „příliš" problémy, napište „dotaz" – a můžeme tak „konzultovat".

1) • $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{(x+3)^2} = \dfrac{-1}{4^2}$ (žádný problém – fce $\dfrac{-1}{(x+3)^2} = f(x)$ je spojitá ve svém def. oboru, tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$)

• $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-1}{(x+3)^2} =$ „$\dfrac{-1}{0^+}$" $= -\infty$

(zde značím $0+$ to, že jmenovatel zlomku má limitu 0 a je kladný v $P(0)$, pak dle věty (a AL) je „$\dfrac{1}{0^+} = +\infty$")

(Věta: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\exists\, P(a): f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ v $P(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ $(-\infty)$)

• $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{(x+3)^2} =$ „$\dfrac{-1}{\infty}$" $= 0$ (AL)

• (poznámka – opět do „ " píšu rozbor „dané situace – – abychom pak „viděli", co lze dále „dělat" dle známých pravidel, resp. zda je zde neurčitý výraz a ten je třeba pak upravit tak, abychom mohli limitu určit dle pravidel – stejně jako u limit posloupností)

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = „\dfrac{3}{0}“ = (?)$ – dle výše uvedené v předchozím příkladu – potřebujeme „znaménko“ jmenovatele x^2-1 v $P(1)$

ale to se mění!

v $P^+(1)$ je $x^2-1>0$ a v $P^-(1)$ je $x^2-1<0$,

tj. $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = „\dfrac{3}{0+}“ = +\infty$ a $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = „\dfrac{3}{0-}“ = -\infty$,

tedy funkce $\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$ v bodě $1 = x$ oboustrannou limitu nemá!

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2-1} = „\dfrac{\infty}{\infty}“ = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 2$ (AL)

$\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = „\dfrac{1}{\infty}“ = 0 \text{ AL}\right)$

- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{1-x^2} = „\dfrac{0}{0}“ = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(1+x)(1-x)} =$

opět neurčitý výraz – zde návod – „najděte“ „něco“!

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+2}{1-x} = \dfrac{1}{2}$ (AL)

• $\underline{\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}}$ $=$ „$\frac{0}{0}$" $= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+5}{(x-1)} =$

$= \frac{6}{0}$, ale opět – nyní se jmenovatel mění v bodě $x=1$ znaménko: $x-1>0$ v $P^+(1)$ a $x-1<0$ v $P^-(1)$, tj:

$\lim\limits_{\substack{x\to 1+ \\ (-)}} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 1+ \\ (-)}} \frac{x+5}{x-1} = \frac{6}{\underset{(-)}{0+}} = \underset{(-)}{+\infty}$ $\Rightarrow$ <u>daná limita neexistuje</u> (oboustranná)

ale kdyby: $\underline{\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^3}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+5}{(x-1)^2} = \frac{6}{0^+} = +\infty$

• $\underline{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{3-x^2}}$ $=$ „$\frac{+\infty}{-\infty}$" $= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x\left(\frac{3}{x^2}-1\right)} =$

$=$ „$\frac{2}{\infty(0-1)}$" $= 0$ (AL)

• $\underline{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3}{3-x^2}}$ $=$ „$\frac{\infty}{-\infty}$" $= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{\frac{3}{x^2}-1} =$

$=$ „$\frac{\infty}{-1}$" $= -\infty$ (AL)

(*) • $\underline{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$ $=$ „$\frac{0}{0}$" $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x\cdot(\sqrt{x+1}+1)} =$

(opět – „odstranitelná 0" + „trik") $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$ (AL)

- ale $\displaystyle \underline{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x}} = „\frac{1}{0}“$ neexistuje, neboť opět

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x} = +\infty \quad a \quad \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x} = -\infty$$

- $\displaystyle \underline{\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = „\frac{\infty}{\infty}“ = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$

$$= \lim_{x\to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \quad (\text{AL} + \text{VOLSF}$$
(věta o limitě složené fce)

ale pozor!

- $\displaystyle \underline{\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x\to -\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1 \; !$

$$(\sqrt{x^2} = |x| \; !)$$

- $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = „\infty - \infty“ = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$

(analog. jako u limit posloupností)

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = „\frac{\infty}{\infty}“ = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

(AL + VOLSF)

2) <u>(VLSF)</u>

- $\displaystyle \underline{\lim_{x\to 3+} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right)} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to -\infty} e^y = 0$

$$\lim_{x\to 3+} \frac{1}{3-x} = „\frac{1}{0-}“ = -\infty$$

a $\underline{\lim\limits_{x\to 3-} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right)} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 3-} \frac{1}{3-x} \;"=\; \frac{1}{0+}" = +\infty$

tedy, fce $\underline{\exp\left(\frac{1}{3-x}\right)}$ v bodě $x=3$ <u>nemá oboustrannou limitu</u>

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{y\to 0} e^y = 1$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3-x} \;"=\; \frac{1}{+\infty}" = 0$, $\exp(y)$ je fce spojitá v $y=0$

- $\underline{\lim\limits_{x\to ?} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$?: 1) v lib. bodě $x_0 \neq 1$ je fce spojitá (spojitost složené fce), tak je $\lim\limits_{x\to x_0} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \exp\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\right)$

  2) <u>„zajímavé" limity</u> jsou pro $x\to 1$, $x\to\pm\infty$
  („Def. obor dané fce je $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ – tj. „zajímavé" limity jsou v bodech krajních intervalů z Df)

tedy: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \overset{(*)}{\underset{\text{VLSF}}{=}} \lim\limits_{y\to-1} e^y = e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1+x}{1-x} \;"=\; \frac{(\pm)\infty}{(\mp)\infty}" = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = -1 \Big\} \underset{\text{VLSF}}{\Longrightarrow} (*)$

$\exp(y)$ je fce spojitá v bodě $x=1$

- $\lim\limits_{x\to 1} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ opět nebude existovat, neboť máme různé jednostranné limity pro $x\to 1\pm$!

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{0\mp} = \mp\infty \quad , \text{ a tedy}$$

$$\lim_{x\to 1+} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to-\infty} e^y = 0, \quad \lim_{x\to 1-} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

- a $\lim\limits_{x\to ?} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ – „kde" bude ?

$$\mathcal{D}f = \left\{ x\in\mathbb{R};\ 1-x\neq 0 \text{ a } \frac{1+x}{1-x} > 0 \right\} = (-1,1)$$

tj. „rozumné" limity jsou pro $x\to -1+$ a pro $x\to 1-$

$$\lim_{x\to 1-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1+x}{1-x} = „\frac{2}{0+}" = +\infty$$

a $$\lim_{x\to -1+} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x\to 0+} \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1+} \frac{1+x}{1-x} = „\frac{0}{2}" = 0 \text{ (AL)}, \quad \text{a } \frac{1+x}{1-x} > 0 \ !$$

- $$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x(1-e^{-2x})} = 1 \quad \text{(AL) (+VLSF)}$$

$$\text{a } \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

- $$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}+1)}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = -1 \quad \text{(AL+VLSF)}$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\right)$$

• a „víme", že $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (třeba přijmout dokázané, nebo na přednášce);

• pak: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5 = 1\cdot 5 = 5$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\underset{VLSF}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\right)$$

• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}\underset{AL}{=}1$

• $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = „1\cdot\frac{1}{0+}" \underset{(AL)}{=} \infty$

• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = „\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x+1}\overset{*}{=}$

„rada" – i je zde také „schovaná" limita $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ – ano!

(a obecnění příkladu) – je dobré vědět, že, pokud je limita typu $\frac{0}{0}$, a obsahuje goniometrické funkce (nebo i t.zv. cyklometrické – tj. „inverzní" ke goniometrickým funkcím – zatím jsme potkali fce arcsin a arctg), tak nejspíš je schovaná v dané limitě $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$

$\overset{*}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x+1}\underset{AL}{=}1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$!

další příklady v d) zkuste sami!

3) <u>VOS</u> • a pozor! $\underline{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}}$ $=_{„}$ $\frac{\text{neexistuje}}{\infty}$ " $\underset{\text{VOS}}{=} 0$,

neboť: $\underset{(\text{pro } x>0)}{0 \le} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \underset{\text{VOS}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$!

• $\underline{\lim\limits_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ $\underset{\text{VLSF}}{=}$ $\lim\limits_{y\to 0} \sin y = 0$ (spojitost sinu v $x=0$)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} =_{„} \frac{1}{\infty}" = 0$

• $\underline{\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ neexistuje – dle Heineho definice :

$\frac{1}{x} \to +\infty$, vezmeme 1) x_n tak, že $\frac{1}{x_n} = n\pi$, tj: $x_n = \frac{1}{n\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

pak $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$

2) $\tilde{x}_n$ tak, že $\frac{1}{\tilde{x}_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

pak $f(\tilde{x}_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1 \longrightarrow 1$ pro $n\to\infty$

„stejně" se ukáže (zkuste sami), že

• <u>fce $f(x) = x\sin x$ nemá limitu pro $x\to+\infty$</u>

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x(2+\sin x) = +\infty$ (VOS): (*)

$2+\sin x \geq 1$ v R, pak

$x(2+\sin x) \geqq x$ pro $x>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\Big\} \underset{VOS}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} x(2+\sin x) = +\infty$ (*)

<u>Podobně (užití VOS):</u>

- $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sin x = 0$, $|e^{-x}\sin x| \leq e^{-x}$ pro $x\in R$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (VOS), neboť $0\leq \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, a $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ (VOS)

4) <u>A ještě trochu:</u>

<u>užití limity: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$</u> (základní vlastnost exponenciální fce e^x)

(T – „takále")

! $\underline{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} \underset{T}{=} 1$ (také „užitečná vědět")

užijeme toho, že fce $\ln x$ je inverzní k fci e^x a VLSF

$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

a $x\to 1 \Rightarrow y\to 0$

<u>a také!:</u>

(T) $\underline{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ x+1=t}}\frac{\ln t}{t-1} = 1$!

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{(-x^2)} \cdot \dfrac{-x^2}{\ln(1-x^2)} =$

$\underset{VOLSF+T}{=}$ „ $1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1$

($\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ (x^2=t)}} \dfrac{\ln(1+t)}{t} \underset{T}{=} 1$, podobně

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x^2)}{-x^2} \underset{VLSF\,(-x^2=t)}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$)

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\sin 2x} =$ „ $\dfrac{0}{0}$ " $= \lim \underbrace{\dfrac{e^x-1}{x}}_{\substack{\to 1 \\ (T)}} \cdot \underbrace{\dfrac{2x}{\sin 2x}}_{\substack{\to 1 \\ VLSF+T}} \cdot \dfrac{1}{2} \underset{AL}{=} \dfrac{1}{2}$

Podobně úlohy : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$

($\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x} \underset{\text{návod}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1} \cdot \dfrac{\cos x - 1}{x}$ a dále

„základní limity" + VLSF)

• $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) =$ „ $\infty \cdot (1-1)$ " $=$ (neurčitý výraz $\infty \cdot 0$ převedeme na podíl)

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{e^t-1}{t} \underset{(T)}{=} 1$

$\dfrac{1}{x} = t$

$x \to \infty \Rightarrow t \to 0+$